UFR de MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER 2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES :

"C*-MODULES HILBERTIENS ET APPLICATIONS"

Frank Taipe

Supervisé par :
Georges Skandalis

Table des matières

1 Introduction

Les C*-modules hilbertiens sont une généralisation naturelle des espaces hilbertiens dans lesquels le corps $\mathbb{C}$ des scalaires est remplacé par une C*-algèbre. Cette généralisation, dans le cas de C*-algèbres commutatives, est apparu dans l'article [3] de I. Kaplansky ; cependant le cas non commutatif semblait trop compliqué à ce moment. La théorie générale de C*-modules hilbertiens est apparue il y a 25 ans dans les articles pionniers de W. Paschke [6] et M. Rieffel [8]. Cette théorie s'est révélée être un outil très pratique dans la théorie des algèbres d'opérateurs, permettant l'obtention d'informations sur les C*-algèbres par l'étude des C*-modules hilbertiens sur eux.

Les C*-modules hilbertiens sont cruciales pour la formulation de KK-théorie de Kasparov [4] et pour fournir un cadre approprié pour étendre la notion de Morita équivalence de C *-algèbres [9]. Ils peuvent être aussi considérés comme la généralisation des fibrés vectoriels de C*-algèbres non-commutatives. Et tels object mathématiques jouent un rôle important dans la géométrie non commutative, notamment dans la théorie des groupes quantiques C*-algébriques [2], et C*-algèbres de groupoïdes.

Le but de ce travail est utiliser les C*-modules hilbertiens comme outil pour formuler la généralisation du théorème de Stinespring et son application dans la théorie des extensions de la forme

$$0 \to A \otimes \mathcal{K} \to B \to C \to 0,$$

où A, B, C sont des C*-algèbre et $\mathcal{K}$ est la C*-algèbre d'opérateurs compacts sur un espace hilbertien séparable.

2 Préliminaires

2.1 L'algèbre d'opérateurs compacts

Proposition 2.1 *On suppose que $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien. Tout opérateur d'image fini est compact ; un opérateur est compact si et seulement s'il est la limite normique d'une suite d'opérateurs continus d'image fini. Si $h \otimes \overline{k}$ note l'opérateur d'range un, $g \mapsto (\ g \mid k\ )h$, alors*

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{span}\{h \otimes \overline{k} : h, k \in \mathcal{H}\}.$$

Corollaire 2.2 *L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ d'opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particulier, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es une C*-sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Notation 2.3 *Si l'espace hilbertien* $\mathcal{H}$ *est séparable, on note* $\mathcal{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *et* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2.2 C*-algèbres

Définition 2.4 *Une* algèbre de Banach *est une algèbre* A *sur* $\mathbb{C}$ *qui est un espace de Banach par rapport à une norme qui est sous-multiplicative, i.e.* $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ *pour tout* $a, b \in A$.

Exemple 2.5 *Si* E *est un espace de Banach complexe, alors l'ensemble* $\mathcal{B}(E)$ *de tous les opérateurs bornés sur* E *est une algèbre de Banach avec les opérations algébriques et norme usuelles.*

Définition 2.6 *Si une algèbre de Banach* A *est munie d'une fonction* $x \mapsto x^* \in A$ *avec les propriétés suivantes*

(i) $(a^*)^* = a;$
(ii) $(a+b)^* = a^* + b^*;$
(iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*;$
(iv) $(ab)^* = b^* a^*;$
(v) $\|a^*\| = \|a\|;$

pour tout $a, b \in A$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors* A *est appelée une* algèbre de Banach involutive *et la fonction* $a \mapsto a^*$ *est appelée* la involution (ou *-opération) *de* A. *Si la involution de* A *satisfait de plus la condition suivante*

(vi) $\|a^* a\| = \|a\|^2,$

pour tout $a \in A$ *(cette condition est appelée* condition C*), *alors* A *est appelé une* C*-algèbre.

Exemple 2.7 *Si* H *est un espace hilbertien complexe, alors l'algèbre de Banach* $\mathcal{B}(H)$ *de tous les opérateurs bornés sur* H *est une C*-algèbre avec l'involution* $T \mapsto T^*$, *où* T^* *est l'opérateur adjoint de* T.

Proposition 2.8 *Si* A *est une algèbre de Banach avec identité* 1, *alors il existe une norme* $\|\cdot\|_0$ *sur* A *tel que :*
(i) *la nouvelle norme* $\|\cdot\|_0$ *est équivalente à la norme originale* $\|\cdot\|$ *;*
(ii) $(A, \|\cdot\|_0)$ *est une algèbre de Banach ;*
(iii) $\|1\|_0 = 1$.

Preuve. Pour chaque $a \in A$, on note par L_a l'opérateur $b \in A \mapsto ab \in A$. La fonction $a \mapsto L_a$ est injective car $L_a(1) = a$. On définie $\|a\|_0 := \|L_a\|$, pour tout $a \in A$. Par l'inégalité $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, on a $\|a\|_0 \leq \|a\|$. D'autre part, on a

$$\|a\|/\|1\| \leq sup\{\|ab\| \ : \ \|b\| \leq 1\} = \|L_a\| = \|a\|_0.$$

Alors, la norme $\|\cdot\|_0$ est équivalente à la norme originale. Les affirmations (ii), (iii) découlent facilement de (i). □

Après la proposition précédente, on va supposer toujours que la norme de l'identité est 1 si l'identité existe. Une algèbre de Banach avec identité est appelé *unitaire*.

Remarque 2.9 *Si* A *est une algèbre de Banach involutive unitaire, alors on a* $1^* = 1$. *De plus, si* A *est une C*-algèbre unitaire, la condition* $\|1\| = 1$ *découle automatiquement de la condition C*.*

Si une algèbre de Banach involutive A n'est pas unitaire, alors on peut plonger A dans une algèbre de Banach involutive unitaire A_1 de la manière suivante : On considère la somme directe $A \oplus \mathbb{C}$ comme l'espace vectoriel A_1, qui est fourni avec une structure d'algèbre de Banach par

$$(a, \lambda)(b, \beta) := (ab + \beta a + \lambda b, \lambda\beta);$$

$$(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda});$$

$$\|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|;$$

pour tout $(a,\lambda),(b,\beta) \in A \oplus \mathbb{C}$. La fonction $a \in A \mapsto (x,0) \in A_1$ est un isomorphisme isométrique et l'élément $(0,1)$ est l'identité de A_1. Si on identifie chaque $a \in A$ avec $(a,0) \in A_1$, alors on écrit $(a,\lambda) = a + \lambda 1_{A_1}$. Avec cette identification, A est un idéal de A_1.

Néanmoins, dans le cas où A est une C*-algèbre, A_1 n'est pas nécessairement une C*-algèbre. Mais, pour devenir une C*-algèbre, on peut modifier la norme sur A_1 de la manière suivante :

Proposition 2.10 *Si une C*-algèbre A n'est pas unitaire, alors il existe une norme sur A_1 qui fait de A_1 une C*-algèbre.*

Preuve. Pour tout $a \in A$, et $\lambda \in C$, on définit $\|a + \lambda 1_A\| := sup\{\|ab + \lambda b\| \,.\, \|b\| \leq 1\}$. Avec cette norme définie A_1 est une C*-algèbre. □

Après la proposition précédente, si on considère une C*-algèbre A qui n'est pas unitaire, alors A_1 notera la C*-algèbre unitaire obtenu par le procédure précédente.

Proposition 2.11 *Pour tout $a \in A$, ils existent $b, c \in A$ tel que $a = bc$.*

2.3 Stabilisation

Définition 2.12 *Une C*-algèbre A est dite* stable *si $A \otimes \mathcal{K} \simeq A$. La stabilisation d'une C*-algèbre A est $A_S := A \otimes \mathcal{K}$.*

Proposition 2.13

1. *$\mathcal{K}$ est l'adhérence de $M_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{\mathbb{N}} M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\mathcal{K} = \varinjlim M_n(\mathbb{C})$.*
2. *$A \otimes \mathcal{K}$ est l'adhérence de $M_\infty(A) = \bigcup_{\mathbb{N}} M_n(A)$.*
3. *$\mathcal{K}$ est stable, c'est-à-dire $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$.*
4. *La stabilisation d'une C*-algèbre est stable.*
5. *Si A est stable, $A \simeq M_n(A)$ pour tout n.*
6. *Si $\alpha \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ est une automorphisme, alors il existe un élément unitaire $U \in \mathcal{B}$ tel que $\alpha = ad(U)$, c'est-à-dire $\alpha(K) = UKU^*$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.*

□

2.4 Algèbre de multiplicateurs

Définition 2.14 *Soit I un idéal non nul dans une C*-algèbre A. On dit que I est* essentiel, *si pour tout idéal $J \neq 0$, on a $I \cap J \neq 0$.*

Théorème 2.15 *Soit A une C*-algèbre. Alors, il existe une C*-algèbre unitaire $\mathcal{M}(A)$ qui contient à A comme un idéal essentiel. Cette C*-algèbre unitaire a la propriété universelle : Si A est un idéal dans une C*-algèbre B, alors il existe un unique morphisme $\mu \colon B \to \mathcal{M}(A)$ tel que μ est l'identité dans A. De plus, μ est injectif si et seulement si A est essentiel dans B.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & B \arrow[d, "\mu"] \\
 & \mathcal{M}(A)
\end{tikzcd}$$

□

Remarque 2.16 *Découle du théorème précédent que pour tout C*-algèbre A, $\mathcal{M}(A)$ est unique à un isomorphisme près. La C*-algèbre $\mathcal{M}(A)$ est appelé* l'algèbre de multiplicateurs de A.

Il y a plusieurs manières de construire $\mathcal{M}(A)$ pour prouver le théorème. On utilisera la construction de R. Busby, qui utilise les double centralisateurs o multiplicateurs.

Définition 2.17 *Un* double centralisateur *pour une C*-algèbre A est une couple (L, R) des fonctions $L, R\colon A \to A$ qui satisfait $aL(b) = R(a)b$ pour tout $a, b \in A$. L'ensemble de tous les doubles centralisateurs pour A est noté par $\mathcal{M}(A)$.*

Exemple 2.18 *Si I est un idéal dans une C*-algèbre A, et $a \in A$, donc $L_a : b \mapsto ab$ et $R_a : b \mapsto ba$ sont fonctions de I vers I. Comme $b' L_a(b) = b'ab = R_a(b')b$ pour tout $b, b' \in I$, donc (L_a, R_a) est un double centralisateur pour I.*

Proposition 2.19 *Si (L, R) est un double centralisateur pour A, alors $L(ab) = L(a)b$ et $R(ab) = aR(b)$ pour tout $a, b \in A$. De plus, L et R sont morphismes linéaires bornés avec $\|L\| = \|R\|$.*

□

Proposition 2.20 *L'ensemble $\mathcal{M}(A)$ est une C*-algèbre unitaire avec la norme et les opérations d'algèbre définie de la manière suivante*

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2, R_1 + R_2);$$

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 \circ L_2, R_1 \circ R_2);$$

$$\lambda(L, R) := (\lambda L, \lambda R), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

$$\|(L, R)\| := \|L\| = \|R\|.$$

Si $T\colon A \to A$ est une fonction, on définit $T^*\colon A \to A$ comme la fonction $a \mapsto (T(a^*))^*$. Alors, on a une involution sur $\mathcal{M}(A)$

$$(L, R)^* := (L^*, R^*).$$

L'élément (id_A, id_A) est l'identité de $\mathcal{M}(A)$. De plus, il existe un morphisme injectif

$$\begin{array}{rccc} i_A : & A & \to & \mathcal{M}(A) \\ & a & \mapsto & (L_a, R_a) \end{array}$$

□

Proposition 2.21 *Soit A, B deux C*-algèbres non unitaires et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme surjectif. Alors, φ peut être étendu à un morphisme $\varphi''\colon \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ et il induite aussi un morphisme $\varphi'\colon \mathcal{M}(A)/A \to \mathcal{M}(B)/B$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{M}(A) \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\varphi''"] & \mathcal{M}(A)/A \arrow[d, "\varphi'"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & \mathcal{M}(B) \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathcal{M}(B)/B \end{tikzcd}$$

De plus, si φ est un isomorphisme, alors φ' et φ'' les sont aussi.

□

3 C*-modules hilbertiens

Ici, on va décrire ses propriétés basiques des C*-modules hilbertiens, on va aussi montrer quelques exemples très importantes. Tout au long, A note une C*-algèbre qui n'est pas nécessairement unitaire.

3.1 Modules hilbertiens

Définition 3.1 *Par un A-module à droite, on désigne un espace vectoriel X muni d'une loi externe*

$$\begin{array}{rccc} \cdot\ : & \mathsf{X} \times A & \to & \mathsf{X} \\ & (x,a) & \mapsto & x \cdot a \end{array}$$

qui satisfait pour tout $a, b \in A$, tout $x, y \in \mathsf{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ les conditions suivantes

- $x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b$,
- $(x+y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$,
- $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$,
- $\lambda(x \cdot a) = (\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a)$.

D'une manière similaire, on peut définir un A-module à gauche X. Quelque fois, on va écrire X_A pour souligner qu'on voit l'espace vectoriel X comme un A-module à droite, et on va écrire ${}_A\mathsf{X}$ pour souligner qu'on voit l'espace vectoriel X comme un A-module à gauche.

Remarque 3.2 *Dans toute la suite, si on dit un A-module on comprendra qu'il s'agit d'un A-module à droite.*

Remarque 3.3 *Tout A-module à droite X est aussi un A_1-module à droite. En effet, on peut étendre l'action de la manière suivante*

$$x \cdot (a + \lambda 1_A) := x \cdot a + \lambda x,$$

pour tout $x \in \mathsf{X}$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 3.4 *Un A-*module pré-hilbertien *à droite est un A-module à droite X muni d'un A-*produit scalaire

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_A : \mathsf{X} \times \mathsf{X} \to A$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(a) $\langle x , \lambda y + \beta z \rangle_A = \lambda \langle x , y \rangle_A + \beta \langle x , z \rangle_A$, *pour tout $x, y, z \in \mathsf{X}$ et tout $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$;*
(b) $\langle x , y \cdot a \rangle_A = \langle x , y \rangle_A a$, *pour tout $x, y \in \mathsf{X}$ et tout $a \in A$;*
(c) $\langle x , y \rangle_A = \langle y , x \rangle_A^*$, *pour tout $x, y \in \mathsf{X}$;*
(d) $\langle x , x \rangle_A \geq 0$, *pour tout $x \in \mathsf{X}$;*

Si en plus, on a $\langle x , x \rangle_A = 0$ si et seulement si $x = 0$, X est appelé un A-module pré-hilbertien séparé.

Remarque 3.5

- *Les conditions (a) et (c), impliquent que $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ est antilinéaire dans la première variable. En effet, on a $\langle \lambda x + \beta y , z \rangle_A = (\lambda \langle z , x \rangle_A + \beta \langle z , y \rangle_A)^* = \overline{\lambda} \langle x , z \rangle_A + \overline{\beta} \langle y , z \rangle_A$, pour tout $x, y, z \in \mathsf{X}$ et tout $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$.*
- *De la même façon, (b) et (c), impliquent que $\langle x \cdot a , y \rangle_A = a^* \langle x , y \rangle_A$, pour tout $x, y \in \mathsf{X}$ et tout $a \in A$.*
- *Pour tout $x, y \in \mathsf{X}$, on a par sesquilinéarité*

$$4 \langle x , y \rangle_A = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x + i^k y , x + i^k y \rangle_A.$$

- *L'adhérence de la *-algèbre $I = span\{\langle x , y \rangle_A : x, y \in \mathsf{X}\}$ est un idéal bilatère de A.*

Remarque 3.6

- *D'une manière similaire, on peut définir un A-module pré-hilbertien (séparé) à gauche.*
- *Tout A-module pré-hilbertien (séparé) est aussi un A_1-module pré-hilbertien (séparé).*

On va montrer les deux exemples élémentaires pour fixer idées, on construira des exemples plus intéressant dans la suite.

Exemple 3.7 *Les $\mathbb{C}$-modules pré-hilbertiens séparés sont les espaces pré-hilbertiens sur $\mathbb{C}$ dans lesquels le "produit scalaire" est antilinéaire dans la première variable.*

Exemple 3.8 *Avec l'action de A par multiplication à droite, et le produit scalaire $\langle\, a\ ,\ b\, \rangle_A := a^*b$, la C^*-algèbre A est un A-module pré-hilbertien séparé qui est noté A_A. En effet, avec la définition du produit scalaire donnée, les axiomes sont facilement vérifiés ; de plus, on a par la condition C^* de A :*

$$\langle\, a\ ,\ a\, \rangle_A = 0 \Leftrightarrow a^*a = 0 \Leftrightarrow \|a^*a\| = 0 \Leftrightarrow \|a\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

De la même manière que les espaces pré-hilbertiens, on espère qu'un A-module hilbertien soit un A-module pré-hilbertien séparé qui est complet par rapport à la norme définie par

$$\|x\|_A := \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\|^{1/2}.$$

Heureusement, cette formula définit une norme ; la preuve découle des propriétés fondamentales d'une C*-algèbre.

Lemme 3.9 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit X un A-module pré-hilbertien. Pour $x, y \in \mathsf{X}$, on a*

$$\langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A \leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A.$$

Preuve. Soit $a := \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \langle\, x\cdot a - ty\ ,\ x\cdot a - ty\, \rangle_A = a^* \langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A a - 2ta^*a + t^2 \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A \leq (\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| - 2t)a^*a + t^2 \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| \leq t$, on a

$$ta^*a \leq t^2 \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A,$$

$$a^*a \leq t\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A. \tag{1}$$

Alors, on a deux cas :

- Si $\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| = 0$, comme on a

  $$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq t\|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\|,$$

  pour tout $t > 0$, donc $\|a\| = 0$.
- Sinon, on prend $t := \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\|$. De (1),

  $$\langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A \leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A.$$

□

Remarque 3.10 *Comme $0 \leq \langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A \leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A$, donc*

$$\|\langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A\|^2 = \|\langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A\| \leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| \|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\|.$$

Corollaire 3.11 *Soit X un A-module pré-hilbertien. Pour tout $x, y \in \mathsf{X}$,*

$$\sqrt{\|\langle\, x+y\ ,\ x+y\, \rangle_A\|} \leq \sqrt{\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\|} + \sqrt{\|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\|}.$$

Preuve. Pour $x, y \in \mathsf{X}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\langle\, x+y\ ,\ x+y\, \rangle_A\| &= \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A + \langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A + \langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A + \langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\| \\
&\leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| + \|\langle\, x\ ,\ y\, \rangle_A\| + \|\langle\, y\ ,\ x\, \rangle_A\| + \|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\| \\
&\leq \|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\| + 2\sqrt{\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\|}\sqrt{\|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\|} + \|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\| \\
&\leq (\sqrt{\|\langle\, x\ ,\ x\, \rangle_A\|} + \sqrt{\|\langle\, y\ ,\ y\, \rangle_A\|})^2.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.12 *Si* X *est un A-module pré-hilbertien, alors la formule*

$$\|x\|_A := \|\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A\|^{1/2}$$

définit une semi-norme sur X. *Si* X *est séparé,* $\|\cdot\|_A$ *est une norme. De plus, pour tout* $x \in \mathsf{X}$ *et* $a \in A$,

$$\|x \cdot a\|_A \leq \|a\| \|x\|_A. \tag{2}$$

Preuve. D'après la définition 3.4, $\|\langle\, \lambda x \,,\, \lambda x \,\rangle_A\| = |\lambda|^2 \|\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A\|$; l'inégalité triangulaire découle du corollaire 3.11, donc $\|\cdot\|_A$ est une semi-norme. Si X est séparé, on a $\|\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc $\|\cdot\|_A$ devient une norme. De plus, on a l'inégalité

$$\|x \cdot a\|_A^2 = \|\langle\, x \cdot a \,,\, x \cdot a \,\rangle_A\| = \|a^* \langle\, x \,,\, x \,\rangle_A a\| \leq \|a^*\| \|x\|_A^2 \|a\| = \|a\|^2 \|x\|_A^2.$$

$\square$

Corollaire 3.13 *Pour* $x \in \mathsf{X}$,

$$\|x\|_A = sup\{\|\langle\, x \,,\, y \,\rangle_A\| \,:\, y \in \mathsf{X}, \|y\|_A \leq 1\}.$$

Preuve. D'après le Remarque 3.10, pour tout $y \in \mathsf{X}$ tel que $\|y\|_A \leq 1$,

$$\|\langle\, x \,,\, y \,\rangle_A\| \leq \|x\|_A \|y\|_A \leq \|x\|_A.$$

Si $\|x\|_A = 0$, donc $\|\langle\, x \,,\, y \,\rangle_A\| = 0$ pour tout $y \in \mathsf{X}$ tel que $\|y\|_A \leq 1$. Sinon, comme

$$\|\langle\, x \,,\, \frac{x}{\|x\|_A} \,\rangle_A\| = \frac{\|\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A\|}{\|x\|_A} = \|x\|_A,$$

et $\|x/\|x\|_A\|_A = 1$, on a l'égalité souhaitée. $\square$

Corollaire 3.14 *Soit* X *un A-module pré-hilbertien séparé. Le A-module normé* $(\mathsf{X}_A, \|\cdot\|_A)$ *est non-dégénéré en le sens que les éléments de la forme* $x \cdot a$ *engendrent un sous-espace dense de* X, *i.e.*

$$\mathsf{X} \cdot \langle\, \mathsf{X} \,,\, \mathsf{X} \,\rangle_A := span\{x \cdot \langle\, y \,,\, z \,\rangle_A : x, y, z \in \mathsf{X}\}$$

est dense dans X *en rapport à la norme* $\|\cdot\|_A$.

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme $P_n(T) = 1 - (1 - T)^n$. Dès que $P_n(0) = 0$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, donc on peut écrire $P_n(T) = TQ_n(T)$, où $Q_n(T) = Q_n(0) + S_n(T)$ et $S_n(T) \in \mathbb{R}[T]$. Découle de l'égalité $|t - tP_n(t)| = |t(1 - t)^n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, que la suite de fonctions $\{tP_n(t)\}_n$ converge simplement vers t sur $[0, 1]$, et en utilisant le Théorème de Dini, on a que $\{tP_n(t)\}_n$ converge uniformément vers t sur $[0, 1]$. Alors la suite de fonctions $\{U_n(t)\}$, où $U_n(T) := (1 - P_n)^2(T)T$, converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$. Soit $x \in \mathsf{X}$ avec $\|x\| \leq 1$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on construit

$$y_n = Q_n(0)x + x \cdot S_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A).$$

Donc, la suite $\{y_n\}$ est dans X et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\langle\, x \,,\, y_n \,\rangle_A &= \langle\, x \,,\, Q_n(0)x + x \cdot S_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A) \,\rangle_A \\
&= Q_n(0) \langle\, x \,,\, x \,\rangle_A + \langle\, x \,,\, x \,\rangle_A S_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A) \\
&= \langle\, x \,,\, x \,\rangle_A (Q_n(0) + S_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A) \\
&= \langle\, x \,,\, x \,\rangle_A Q_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A) \\
&= P_n(\langle\, x \,,\, x \,\rangle_A).
\end{aligned}$$

On affirme que la suite $\{x \cdot \langle\, x\,,\, y_n\,\rangle_A\}$ converge vers x. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|x - x\cdot\langle\, x\,,\, y_n\,\rangle_A\|_A^2 &= \|x\cdot(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A))\|_A^2 \\
&= \|\langle\, x\cdot(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A))\,,\, x\cdot(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A))\,\rangle_A\| \\
&= \|(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A))\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A))\| \\
&= \|(1-P_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A)^2\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A\| \\
&= \|(1-P_n)^2(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A)\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A\| \\
&= \|U_n(\langle\, x\,,\, x\,\rangle_A)\|
\end{aligned}$$

pour chaque $n \in N$. □

Remarque 3.15 *Étant donné $x \in \mathsf{X}$, d'après la démonstration du Corollaire précédent, il existe une suite $\{x_n\}_n$ d'éléments de X associé à x, tel que $x\cdot\langle\, x\,,\, x_n\,\rangle_x \to x$.*

Définition 3.16 *Un A-*module hilbertien *est un A-module pré-hilbertien séparé X qui est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$. Il est appelé A-*module hilbertien plein *si l'idéal $I = span\{\langle\, x\,,\, y\,\rangle_A \,:\, x,y\in\mathsf{X}\}$ est dense dans A.*

Si X et Y sont des A-modules hilbertiens, un morphisme de modules hilbertiens *de X vers Y, est une transformation linéaire $\phi\colon \mathsf{X}\to\mathsf{Y}$ qui respecte l'action de A, c'est-à-dire, $\phi(x\cdot a) = \phi(x)\cdot a$ pour tout $x\in\mathsf{X}$ et $a\in A$. Une autre manière de le dire est que ϕ est A-linéaire.*

Remarque 3.17 *Si X est un A-module pré-hilbertien, donc $\mathcal{N} = \{x\in\mathsf{X} \,:\, \langle\, x\,,\, x\,\rangle_A = 0\}$ est un sous-A-module de X. Le complété séparé de X (le complété de $\mathsf{X}/\mathcal{N}$) est un A-module hilbertien.*

Exemple 3.18 *Les $\mathbb{C}$-modules hilbertiens sont les espaces hilbertiens sur $\mathbb{C}$ dans lesquels le produit scalaire est antilinéaire dans la première variable.*

Exemple 3.19 *Le A-module pré-hilbertien séparé A_A est un A-module hilbertien plein. En effet, la norme dans A_A est l'usuel de la C^*-algèbre A : $\|a\|_A^2 = \|\langle\, a\,,\, a\,\rangle_A\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Découle de la Proposition 2.11, qu'il est plein. En général, si I est un idéal bilatère fermé propre dans A, alors I_A est un A-module hilbertien qui n'est pas plein, car l'adhérence de $span\{\langle\, i\,,\, j\,\rangle_A : i,j\in I\}$ est I.*

Exemple 3.20 *Soit p un projecteur dans A. Alors $Ap := \{ap \,:\, a\in A\}$ est un pAp-module hilbertien avec produit scalaire $\langle\, ap\,,\, bp\,\rangle_A := pa^*bp$. Les propriétés algébriques sont faciles de vérifier, et la norme coïncide avec la norme usuelle sur Ap, vu comme sous-ensemble de A :*

$$\|ap\|_{pAp}^2 = \|\langle\, ap\,,\, ap\,\rangle_{pAp}\| = \|pa^*ap\| = \|ap\|^2.$$

Comme Ap est un sous-espace vectoriel fermé de A, il est complet. De plus, il est plein car les produits de la forme a^*b sont denses dans A.

Exemple 3.21 *Soient T un espace Hausdorff localement compact, et $\mathcal{H}$ un espace hilbertien. Alors,*

$$\mathsf{X} := C_0(T,\mathcal{H}) = \{x : T\to\mathcal{H} : x \text{ est continue et } t\mapsto\|x(t)\|\in C_0(T)\},$$

est un $C_0(T)$-module hilbertien avec les opérations

$$(x\cdot f)(t) := x(t)f(t), \qquad \text{et} \qquad \langle\, x\,,\, y\,\rangle_{C_0(T)}(t) := (\, y(t)\mid x(t)\,).$$

Exemple 3.22 (Somme directe) *Soit $\{\mathsf{X}_i\}_{i=1}^n$ une famille des A-modules hilbertiens. C'est un calcul facile montrer que*

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i := \{(x_i)_{i=1}^n := (x_1,x_2,\cdots,x_n) \,:\, x_i\in\mathsf{X}_i\}$$

est un A-module à droite par la action $(x_i)_{i=1}^n \cdot a := (x_i \cdot a)_{i=1}^n$, pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$, et $a \in A$. On définit un produit scalaire sur $\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$ de la façon suivante

$$\langle\, (x_i)_{i=1}^n \,,\, (y_i)_{i=1}^n \,\rangle_A := \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, y_i \,\rangle_A.$$

De plus, on a

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_A^2 = \|\langle\, (x_i)_{i=1}^n \,,\, (x_i)_{i=1}^n \,\rangle_A\| = \left\| \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A \right\|.$$

Comme

$$0 \leq \langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A \leq \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A,$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$, on a

$$\|x_i\|_A^2 = \|\langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_A^2.$$

Alors,

$$max\{\|x_i\|_A \,:\, i = 1, \cdots, n\} \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_A \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_A^2 \right)^{1/2},$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$. Donc, $\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$ est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$ puisque chaque X_i est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$. C'est-à-dire, $\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$ est un A-module hilbertien. De plus, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (*Lemme 3.9*) *on a*

$$\|\langle\, (x_i)_{i=1}^n \,,\, (y_i)_{i=1}^n \,\rangle_A\|^2 \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_A \|(y_i)_{i=1}^n\|_A,$$

d'où

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, y_i \,\rangle_A \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n \langle\, x_i \,,\, x_i \,\rangle_A \right\| \left\| \sum_{i=1}^n \langle\, y_i \,,\, y_i \,\rangle_A \right\|, \tag{3}$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$.

Si pour chaque $1 \leq i \leq n$, X_i est le même A-module hilbertien X, alors on va noter

$$\mathsf{X}^n := \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i.$$

Exemple 3.23 *Comme cas particulier de l'exemple précédente, la somme directe de n-copies de A_A (dénoté par A^n) est un A-module hilbertien où*

$$\langle\, (a_i)_{i=1}^n \,,\, (b_i)_{i=1}^n \,\rangle_A = \sum_{i=1}^n \langle\, a_i \,,\, b_i \,\rangle_A = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i,$$

pour tout $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in A^n$. Par l'inégalité (3) on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^* b_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i^* a_i \right\| \left\| \sum_{i=1}^n b_i^* b_i \right\|,$$

pour tout $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in A^n$.

Proposition 3.24 *Soit* $\{\mathsf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille de A-modules hilbertiens. Alors*

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i := \left\{\mathbf{x}=(x_i)\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i \ :\ \sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A \textit{ converge dans } A\right\}$$

est un A-module hilbertien avec l'action à droite

$$\mathbf{x}\cdot a := (x_i\cdot a)$$

pour $\mathbf{x}=(x_i)\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$, $a\in A$ *et le produit scalaire*

$$\langle\, \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}\,\rangle_A := \sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ y_i\,\rangle_A,$$

pour $\mathbf{x}=(x_i),\mathbf{y}=(y_i)\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$.

Preuve. D'abord, on va montrer que ces formules sont bien définies. L'action de A sur $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$ est bien définie, en effet, pour $n\le m$, d'après l'inégalité (2) on a

$$\|(x_i\cdot a)_{i=n}^m\|_A^2 = \|(x_i)_{i=n}^m\cdot a\|_A^2 \le \|a\|^2\|(x_i)_{i=n}^m\|_A^2,$$

d'où

$$\left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\cdot a\ ,\ x_i\cdot a\,\rangle_A\right\| \le \|a\|^2\left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A\right\|.$$

Comme les sommes partiales de $\sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A$ sont Cauchy, on a montré que $\sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\cdot a\ ,\ x_i\cdot a\,\rangle_A$ converge dans A, donc $\mathbf{x}\cdot a := (x_i\cdot a)$ appartient à $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$. Pour voir que la formule du produit scalaire est bien définie, supposons que $m\le n$ et on utilise l'inégalité (3) pour montrer que

$$\left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ y_i\,\rangle_A\right\|^2 \le \left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A\right\|\left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, y_i\ ,\ y_i\,\rangle_A\right\|.$$

Comme les sommes partiales de $\sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A$ et de $\sum_{i=1}^{\infty}\langle\, y_i\ ,\ y_i\,\rangle_A$ sont Cauchy, on a montré que $\sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ y_i\,\rangle_A$ converge dans A, donc $\langle\, \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}\,\rangle_A$ appartient à A.

C'est un calcul facile de voir que $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$ est un A-module pré-hilbertien séparé. Démontrons qu'il est complet, on suppose que la suite $\{\mathbf{x}^n=(x_i^n)\}_n$ est de Cauchy dans $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $i\in\mathbb{N}$, on a

$$\|x_i^n\|_A^2 = \|\langle\, x_i^n\ ,\ x_i^n\,\rangle_A\| \le \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\langle\, x_j^n\ ,\ x_j^n\,\rangle_A\right\| = \|\langle\, \mathbf{x}^n\ ,\ \mathbf{x}^n\,\rangle_A\| = \|\mathbf{x}^n\|_A^2.$$

Donc, fixé $i\in\mathbb{N}$, chaque suite $\{x_i^n\}_n$ est de Cauchy dans A et il converge vers un $x_i\in A$. On va montrer que $\mathbf{x}:=(x_i)\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$ et que la suite $\{\mathbf{x}^n\}_n$ converge vers $\mathbf{x}$. Pour montrer que $\mathbf{x}\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$, on va démontrer que pour tout $\epsilon>0$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que si $m\ge n\ge p$ alors

$$\left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A\right\| \le \epsilon^2. \tag{4}$$

Pour chaque $\mathbf{x}=(x_i)\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$ et $n\le m$, on définit

$$\|\mathbf{x}\|_{n,m} := \left\|\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A\right\|^{1/2}.$$

De plus, si $\mathbf{x}\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathsf{X}_i$, on a

$$\sum_{i=n}^{m}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A \le \sum_{i=1}^{\infty}\langle\, x_i\ ,\ x_i\,\rangle_A,$$

donc $\|\mathbf{x}\|_{n,m} \leq \|\mathbf{x}\|_A$ pour tout $n \leq m$.

Comme la suite $\{\mathbf{x}^n\}_n$ est de Cauchy, donné $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\|_A \leq \frac{\epsilon}{3},$$

pour tout $k, l \geq N$. On choisi $P \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{i=P}^{\infty} \langle\, x_i^N \,,\, x_i^N \,\rangle_A \right\|^{1/2} < \frac{\epsilon}{3}.$$

On fixe $m, n \geq P$, donc on peut trouver $M \geq N$ (M ne dépend que de m et n) tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} < \epsilon/3$. Alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{n,m} &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^M - \mathbf{x}^N\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^N\|_{n,m} \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^M - \mathbf{x}^N\|_A + \left\| \sum_{i=P}^{\infty} \langle\, x_i^N \,,\, x_i^N \,\rangle_A \right\|^{1/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Dés que le terme de droite de (4) est égal à $\|\mathbf{x}\|_{n,m}^2$ et comme P ne dépend que de ϵ, on a démontré que $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i$.

Soit $\epsilon > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_A \leq \epsilon$, pour $n, m \geq N$. Alors, pour n'importe que $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \langle\, x_i^n - x_i^m \,,\, x_i^n - x_i^m \,\rangle_A \right\| \leq \epsilon^2,$$

et si on prend $m \to \infty$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \langle\, x_i^n - x_i \,,\, x_i^n - x_i \,\rangle_A \right\| \leq \epsilon^2, \tag{5}$$

pour tout $n \geq N$. Comme $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i$, donc $\mathbf{x}^n - \mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i$, et comme (5) est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|_A \leq \epsilon$ pour $n \geq N$. Ceci complète la preuve. $\square$

Exemple 3.25 (Le module hilbertien standard H_A) *Si on considère $\mathsf{X}_i = A_A$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, par la Proposition précédente*

$$\mathsf{H}_A := \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_A = \left\{ \mathbf{a} = (a_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} A \;:\; \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i \text{ converge dans } A \right\}$$

est un A-module hilbertien, il est appelé le module hilbertien standard sur A.

3.2 Opérateurs adjointables

De la même façon que les espaces hilbertiens, nous étudions les opérateurs sur les modules hilbertiens.

Définition 3.26 *Soient X et Y des A-modules hilbertiens. Une fonction $T\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ est un* opérateur adjointable, *s'il existe une fonction $T^*\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ qui satisfait la condition*

$$\langle\, T(x) \,,\, y \,\rangle_A = \langle\, x \,,\, T^*(y) \,\rangle_A,$$

pour tout $x \in \mathsf{X}$, $y \in \mathsf{Y}$. La fonction T^* est appelé adjoint *de T.*

Lemme 3.27 *Si $T\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ est adjointable, alors son adjoint est unique et adjointable avec $(T^*)^* = T$. Si $T\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ et $S\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{Z}$ sont adjointables, alors $S \circ T\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Z}$ es adjointable avec $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. De plus, si $T\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ est adjointable, alors T et T^* sont morphismes A-linéaires bornés.*

Preuve. S'il existe une autre fonction $T' : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ tel que $\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A = \langle\, x\ ,\ T'(y)\, \rangle_A$, pour tout $x \in \mathsf{X}$, $y \in \mathsf{Y}$. Alors, $\langle\, x\ ,\ T'(y)\, \rangle_A = \langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A = \langle\, x\ ,\ T^*(y)\, \rangle_A$, pour tout $x \in \mathsf{X}$, $y \in \mathsf{Y}$. Comme le produit scalaire est définie positive, donc $T' = T^*$.

Si S et T sont adjointables, on a $\langle\, S(T(x))\ ,\ z\, \rangle_A = \langle\, T(x)\ ,\ S^*(z)\, \rangle_A = \langle\, x\ ,\ T^*(S^*(z))\, \rangle_A$, pour tout $x \in \mathsf{X}$, $z \in \mathsf{Z}$. Alors $S \circ T$ est adjointable avec $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Si $\langle\, T^*(y)\ ,\ x\, \rangle_A = \langle\, y\ ,\ z\, \rangle_A$, pour tout $y \in \mathsf{X}$, donc $T(x) = z$. Alors

$$G(T) := \{(x, z) \,:\, \langle\, T^*(y)\ ,\ x\, \rangle_A = \langle\, y\ ,\ z\, \rangle_A,\ \text{pour tout } y \in \mathsf{X}\}, \tag{6}$$

est un sous-module fermé de $\mathsf{X} \oplus \mathsf{Y}$, donc T est A-linéaire (de la même façon T^* est A-linéaire). De plus, l'égalité (6) montre que le graphe de T (et de T^*) est fermé, donc T (et T^*) est borné.

□

Définition 3.28 *Si* X *et* Y *sont* A*-modules hilbertiens, alors on va noter par* $\mathcal{L}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ *l'ensemble de tous les opérateurs adjointables de* X *vers* Y*. On note aussi* $\mathcal{L}(\mathsf{X}) := \mathcal{L}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$*.*

Proposition 3.29 *Soient* X*,* Y *deux* A*-modules hilbertiens. Alors, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| : & \mathcal{L}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) & \to & \mathbb{R} \\ & T & \mapsto & \mathit{sup}\{\|\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A\| \,:\, x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}\ \mathit{et}\ \|x\|_A \leq 1,\ \|y\|_A \leq 1\} \end{array}$$

est une norme pour $\mathcal{L}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$*.*

Preuve. On sait, d'après le Corollaire 3.13, que pour tout $x \in \mathsf{X}$

$$\|T(x)\|_A = \mathit{sup}\{\|\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A\| \,:\, y \in \mathsf{Y}, \|y\|_A \leq 1\}.$$

Donc

$$\mathit{sup}\{\|\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A\| \,:\, x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y} \text{ et } \|x\|_A \leq 1,\ \|y\|_A \leq 1\} = \mathit{sup}\{\|T(x)\|_A \,:\, x \in \mathsf{X},\ \|x\|_A \leq 1\}.$$

Cette dernière égalité montre que la fonction $\|\cdot\|$ est la restriction de la norme usuelle pour les opérateurs bornés sur les espaces vectoriels normés. □

Remarque 3.30 *D'après le Lemme 3.27,* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ *est une sous-algèbre de l'algèbre de Banach* $\mathcal{B}(\mathsf{X})$*. De plus,* $T \mapsto T^*$ *est une involution dans* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$*.*

On va montrer dans la suite, un opérateur linéaire borné sur une A-module hilbertien qui n'est pas adjointable.

Exemple 3.31 (Un morphisme linéaire borné qui n'est pas adjointable) *Soient* $A = C([0, 1])$ *et* $J = \{f \in A \,:\, f(0) = 0\}$*. Or,* A *et* J *sont* A*-modules hilbertiens, on considère le* A*-module hilbertien* $\mathsf{X} := A \oplus J$*, et on définie la fonction* $T : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ *par* $T(f, g) = (g, 0)$*. C'est facile de voir que* T *est* A*-linéaire et borné avec* $\|T\| = 1$*. De plus, si* T *est adjointable, en considèrent* $(f, g) := T^*(1, 0)$*, alors pour tout* $(h, k) \in \mathsf{X}$

$$\bar{k} = \langle\, T(h, k)\ ,\ (1.0)\, \rangle_A = \langle\, (h, k)\ ,\ (f, g)\, \rangle_A = \bar{h}f + \bar{k}g,$$

d'où $f \equiv 0$ *et* $g \equiv 1$*, une contradiction avec la condition* $g(0) = 0$*. Donc* T *n'est pas adjointable.*

Corollaire 3.32 *Soit* X *un* A*-module hilbertien. Alors,* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ *est une* C^**-algèbre.*

Preuve. Si T es adjointable, on a l'égalité

$$\|\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A\| = \|\langle\, x\ ,\ T^*(y)\, \rangle_A\| = \|\langle\, T^*(y)\ ,\ x\, \rangle_A^*\| = \|\langle\, T^*(y)\ ,\ x\, \rangle_A\|,$$

donc

$$\|T\| = \mathit{sup}\{\|\langle\, T(x)\ ,\ y\, \rangle_A\| \,:\, x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y} \text{ et } \|x\|_A \leq 1,\ \|y\|_A \leq 1\} = \|T^*\|.$$

Alors, $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ est une *-algèbre de Banach. De plus, comme pour $x \in \mathsf{X}$ tel que $\|x\|_A \leq 1$, on a

$$\|T(x)\|_A^2 = \|\langle\, T^* \circ T(x)\ ,\ x\, \rangle_A\| \leq \|T^* \circ T(x)\|_A \|x\|_A \leq \|T^* \circ T\| \|x\|_A^2 \leq \|T^* \circ T\|,$$

donc $\|T\|^2 \leq \|T^* \circ T\|$. Par ailleurs $\|T^* \circ T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Alors, $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ est une C*-algèbre. □

Lemme 3.33 *Soit* X *un* A*-module hilbertien et* T *un morphisme linéaire de* X *vers* X*. Alors,* T *est un élément positif de* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ *si et seulement si* $\langle\, T(x)\,,\, x\,\rangle_A \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathsf{X}$.

Preuve.
[$\Rightarrow$]. Si $T \geq 0$ dans $\mathcal{L}(\mathsf{X})$, donc $T = S^* \circ S$ pour un $S \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$ et $\langle\, T(x)\,,\, x\,\rangle_A = \langle\, S(x)\,,\, S(x)\,\rangle_A \geq 0$ pour tout $x \in \mathsf{X}$.
[$\Leftarrow$]. Si $\langle\, T(x)\,,\, x\,\rangle_A \geq 0$ pour tout $x \in \mathsf{X}$, donc $\langle\, T(x)\,,\, x\,\rangle_A = \langle\, x\,,\, T(x)\,\rangle_A$ pour tout $x \in \mathsf{X}$. D'après l'identité de polarisation

$$4\langle\, x\,,\, T(y)\,\rangle_A = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle\, x + i^k y\,,\, T(x + i^k y)\,\rangle_A,$$

on a que $\langle\, T(x)\,,\, y\,\rangle_A = \langle\, x\,,\, T(y)\,\rangle_A$ pour tout $x, y \in \mathsf{X}$. Alors, T est adjointable avec $T^* = T$. Du calcul fonctionnel, on peut écrire $T = S - R$ avec $S, R \geq 0$ dans $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ et $R \circ S = S \circ R = 0$. Pour tout $x \in \mathsf{X}$, on a

$$0 \leq \langle\, T \circ R(x)\,,\, R(x)\,\rangle_A = -\langle\, R^3(x)\,,\, x\,\rangle_A.$$

Comme $R^3 \geq 0$, $\langle\, R^3(x)\,,\, x\,\rangle_A = 0$ pour tout $x \in \mathsf{X}$, donc $R^3 = 0$ par l'identité de polarisation, d'où $R = 0$. Donc $T = S$ est positif. $\square$

Lemme 3.34 *Soient les* A*-modules hilbertiens* X_1*,* X_2*,* X_3*. Pour* $x \in \mathsf{X}_1$ *et* $y \in \mathsf{X}_2$*, on construit la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \theta_{x,y}: & \mathsf{X}_2 & \to & \mathsf{X}_1 \\ & z & \mapsto & x \cdot \langle\, y\,,\, z\,\rangle_A \end{array}$$

Alors, $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$ *avec* $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$*. De plus, si* $u \in \mathsf{X}_2$*,* $v \in \mathsf{X}_3$*,* $T \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$*,* $S \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_2)$*, alors*

$$T \circ \theta_{u,v} = \theta_{T(u),v}\,, \qquad \theta_{x,y} \circ S = \theta_{x,S^*(y)}.$$

En particulier,

$$\theta_{x,y} \circ \theta_{u,v} = \theta_{x \cdot \langle\, y\,,\, u\,\rangle_A, v} = \theta_{x, v \cdot \langle\, u\,,\, y\,\rangle_A}.$$

Preuve. Pour $x, x' \in \mathsf{X}_1$ et $y, y' \in \mathsf{X}_2$, on a l'égalité

$$\langle\, \theta_{x,y}(y')\,,\, x'\,\rangle_A = \langle\, x \cdot \langle\, y\,,\, y'\,\rangle_A\,,\, x'\,\rangle_A = \langle\, y'\,,\, y \cdot \langle\, x\,,\, x'\,\rangle_A\,\rangle_A = \langle\, y'\,,\, \theta_{y,x}(x')\,\rangle_A.$$

De plus, pour $u \in \mathsf{X}_2$, $v \in \mathsf{X}_3$, $T \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$, $S \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_2)$, on a

$$T \circ \theta_{u,v}(z) = T(u \cdot \langle\, v\,,\, z\,\rangle_A) = T(u) \cdot \langle\, v\,,\, z\,\rangle_A = \theta_{T(u),v}(z),$$

et

$$\theta_{x,y} \circ S(z') = x \cdot \langle\, y\,,\, S(z')\,\rangle_A = x \cdot \langle\, S^*(y)\,,\, z'\,\rangle_A = \theta_{x,S^*(y)}(z').$$

$\square$

Notation 3.35 *Pour chaque couple des* A*-modules hilbertiens* X *et* Y*, on va noter*

$$\Theta(\mathsf{Y}, \mathsf{X}) := \{\theta_{x,y} \,:\, x \in \mathsf{X},\, y \in \mathsf{Y}\}.$$

On va aussi noter, $\Theta(\mathsf{X}) := \Theta(\mathsf{X}, \mathsf{X})$.

Remarque 3.36 *C'est un calcul facile montrer que* $\theta_{x+x',y} = \theta_{x,y} + \theta_{x',y}$ *et* $\theta_{x,y+y'} = \theta_{x,y} + \theta_{x,y'}$*, pour tout* $x, x' \in \mathsf{X}_1$ *et* $y, y \in \mathsf{X}_2$.

Définition 3.37 *L'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par* $\Theta(\mathsf{Y}, \mathsf{X})$ *dans* $\mathcal{L}(\mathsf{Y}, \mathsf{X})$ *sera noté par* $\mathcal{K}(\mathsf{Y}, \mathsf{X})$*. On note aussi* $\mathcal{K}(\mathsf{X}) := \mathcal{K}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$ *et* $\mathcal{K}_A := \mathcal{K}(\mathsf{H}_A)$.

Corollaire 3.38 *Pour tout* A*-module hilbertien* X*,* $\mathcal{K}(\mathsf{X})$ *est un idéal bilatère fermé dans* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$.

Preuve. Par le Lemme 3.34, l'ensemble $\Theta(\mathsf{X})$ est fermé par composition à gauche, composition à droite et involution, donc $\mathcal{K}(\mathsf{X})$ est un idéal bilatère. De plus, $\mathcal{K}(\mathsf{X})$ est fermé dans $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ par définition. $\square$

Exemple 3.39 *Si* X *est le* $\mathbb{C}$*-module hilbertien* $\mathcal{H}$*, alors* $\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *et* $\mathcal{K}(\mathsf{X}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$*.*

Exemple 3.40 *Si* $\mathsf{X} = A_A$*. Chaque* $a \in A$ *définit un morphisme* $L_a \colon A \to A$ *par multiplication à gauche, i.e.* $L_a(b) = ab$ *pour tout* $b \in A$*. De plus, le morphisme* L_{a^*} *est l'adjoint de* L_a*, donc* $L_a \in \mathcal{L}(A_A)$ *; et comme* $\|L_a\| \le \|a\|$ *et* $\|L_a(a^*)\| = \|a\|\|a^*\|$*, on a que* $\|L_a\| = \|a\|$*. Alors, la fonction*

$$\begin{array}{rccc} L: & A & \to & \mathcal{L}(A_A) \\ & a & \mapsto & L_a \end{array}$$

est un isomorphisme de A *vers un *-sous-algèbre fermée de* $\mathcal{L}(A_A)$*. Or,* $\theta_{a,b}(c) = a\langle\, b \,,\, c \,\rangle_A = ab^*c = L_{ab^*}(c)$*,* $\mathcal{K}(A_A)$ *est l'adhérence de l'image sous* L *de l'enveloppe linéaire des produits dans* A*. Découle de la Proposition 2.11 que* $A = A^2$*, donc* L *est un isomorphisme entre* A *et* $\mathcal{K}(A_A)$*.*

Soit $\{\mathsf{X}_i\}_{i=1}^n$ une famille de A-modules hilbertiens. Pour chaque $1 \le j \le n$, on définit

$$\begin{array}{rccc} U_j: & \mathsf{X}_j & \to & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i \\ & x & \mapsto & (x_i)_{i=1}^n \end{array}$$

où $x_i = x$ si $j = i$ et $x_i = 0$ si $i \neq j$. Comme pour tout $x \in \mathsf{X}_j$ et $(y_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i$, on a

$$\langle\, U_j(x) \,,\, (y_i)_{i=1}^n \,\rangle_A = \langle\, x \,,\, y_j \,\rangle_A,$$

donc $U_j \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_j, \bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i)$ avec

$$\begin{array}{rccc} U_j^*: & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i & \to & \mathsf{X}_j \\ & (x_i)_{i=1}^n & \mapsto & x_j \end{array}$$

Alors, on a construit une famille de opérateurs adjointables de A-modules hilbertiens $\{U_i\}_{i=1}^n$ tel que

$$U_i^* \circ U_j = \begin{cases} id_{\mathsf{X}_i} & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n U_i \circ U_i^* = id_{\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i}.$$

Lemme 3.41 *Soit* $\{\mathsf{X}_i\}_{i=1}^n$ *une famille de* A*-modules hilbertiens. Alors*

$$\mathcal{L}(\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i) \simeq \{(T_{i,j})_{n\times n} \,:\, T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_j, \mathsf{X}_i)\}$$

$$\mathcal{K}(\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i) \simeq \{(T_{i,j})_{n\times n} \,:\, T_{i,j} \in \mathcal{K}(\mathsf{X}_j, \mathsf{X}_i)\}$$

Preuve. On a les fonctions bien définies

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i) & \to & \{(T_{i,j})_{n\times n} \,:\, T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_j, \mathsf{X}_i)\} \\ T & \mapsto & (U_i^* \circ T \circ U_j)_{n\times n} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \{(T_{i,j})_{n\times n} \,:\, T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_j, \mathsf{X}_i)\} & \to & \mathcal{L}(\bigoplus_{i=1}^n \mathsf{X}_i) \\ (T_{i,j})_{n\times n} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i,j=1}^n U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^* \end{array}$$

De plus, comme

$$\sum_{i,j=1}^{n} U_i \circ (U_i^* \circ T \circ U_j) \circ U_j^* = \left(\sum_{i=1}^{n} U_i \circ U_i^*\right) \circ T \circ \left(\sum_{j=1}^{n} U_j \circ U_j^*\right) = T,$$

et

$$U_r^* \circ (\sum_{i,j=1}^{n} U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^*) \circ U_s = \sum_{i,j=1}^{n} U_r^* \circ U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^* \circ U_s = T_{r,s},$$

on obtient l'isomorphisme. D'après le Lemme 3.34, comme l'ensemble Θ est invariant par rapport à la composition à droite ou à gauche, donc le deuxième isomorphisme découle facilement du première. $\square$

Corollaire 3.42 *Si X est un A-module hilbertien, alors*

$$\mathcal{L}(\mathsf{X}^n) \simeq M_n(\mathcal{L}(\mathsf{X})), \qquad \mathcal{K}(\mathsf{X}^n) \simeq M_n(\mathcal{K}(\mathsf{X})).$$

De plus, $\mathcal{K}(A^n) \simeq M_n(A)$ et $\mathcal{K}_A \simeq \mathcal{K} \otimes A$.

Soit X un A-module hilbertien. Pour chaque $x \in \mathsf{X}$, on construit la fonction

$$\begin{array}{rccc} L_x : & A_A & \to & \mathsf{X} \\ & a & \mapsto & x \cdot a \end{array}$$

Comme

$$\langle\, L_x(a) \,,\, y \,\rangle_A = \langle\, x \cdot a \,,\, y \,\rangle_A = a^* \langle\, x \,,\, y \,\rangle_A = \langle\, a \,,\, \langle\, x \,,\, y \,\rangle_A \,\rangle_A,$$

pour tout $y \in \mathsf{X}$ et $a \in A$. Donc $L_x \in \mathcal{L}(A_A, \mathsf{X})$ et

$$L_x^*(y) = \langle\, x \,,\, y \,\rangle_A.$$

Remarque 3.43

- *Pour $x \in \mathsf{X}$, on a*

$$\|L_x\| = \|L_x^*\| = sup\{\|\langle\, x \,,\, y \,\rangle_A\| \;:\; \|y\|_A \leq 1\} = \|x\|_A.$$

- *Pour $x, x' \in \mathsf{X}$, alors $L_{x+x'} = L_x + L_{x'}$ dans $\mathcal{L}(A_A, \mathsf{X})$. En effet, on a*

$$L_{x+x'}(a) = (x + x') \cdot a = x \cdot a + x' \cdot a = L_x(a) + L_{x'}(a),$$

pour tout $a \in A$.
- *Pour $x \in \mathsf{X}$ et $\lambda \in C$, alors $L_{\lambda x} = \lambda L_x$ dans $\mathcal{L}(A_A, \mathsf{X})$. En effet, on a*

$$L_{\lambda x}(a) = (\lambda x) \cdot a = \lambda x \cdot a = \lambda L_x(a),$$

pour tout $a \in A$.
- *Pour $x \in \mathsf{X}$ et $a \in A$, alors $L_{x \cdot a} = \theta_{x,a^*}$ dans $\mathcal{L}(A_A, \mathsf{X})$. En effet, on a*

$$L_{x \cdot a}(b) = (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab) = \theta_{x,a^*}(b),$$

pour tout $b \in A$.

Lemme 3.44 *Soit X un A-module hilbertien. Alors, l'application $x \mapsto L_x$ est un isomorphisme linéaire isométrique de X sur $\mathcal{K}(A_A, \mathsf{X})$.*

Preuve. Que la fonction L soit un morphisme linéaire isométrique, provient de la Remarque 3.43. Il reste démontrer que la fonction L est surjective. Par la Remarque 3.43, on sait que l'image de L est fermée et que $\Theta(A_A, \mathsf{X}) \subset L(\mathsf{X})$. De plus, découle du Corollaire 3.14 que $L(\mathsf{X}) \subset \mathcal{K}(A_A, \mathsf{X})$. Comme, $\Theta(A_A, \mathsf{X})$ est dense dans $\mathcal{K}(A_A, \mathsf{X})$, donc $L(\mathsf{X}) = \mathcal{K}(A_A, \mathsf{X})$. Alors L est un isomorphisme linéaire isométrique. $\square$

Remarque 3.45 *Soit le morphisme $M \in \mathcal{K}(A_A \oplus \mathsf{X})$ tel que $M = M^*$ et M anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, il existe un unique $x \in \mathsf{X}$ tel que*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, comme $M \in \mathcal{K}(A_A \oplus \mathsf{X})$, découle du Lemme 3.41 qu'il existe $T \in \mathcal{K}(\mathsf{X}, A_A)$, $S \in \mathcal{K}(A_A, \mathsf{X})$, $R \in \mathcal{K}(\mathsf{X})$ et $a \in A$, tel quel $M = \begin{pmatrix} a & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Or, $M = M^*$ et M anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $M = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$. D'après le Lemme 3.44, il existe un unique $x \in \mathsf{X}$ tel que $T^* = L_x$, donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.46 *Soit X un A-module hilbertien. Pour chaque $x \in \mathsf{X}$, il existe un unique $y \in \mathsf{X}$ tel que*

$$x = y \cdot \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A = \theta_{y,y}(y).$$

Preuve. Pour chaque $x \in \mathsf{X}$, le morphisme $\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$ est autoadjoint dans $\mathcal{K}(A_A \oplus \mathsf{X})$. Si $f(x) = x^{1/3}$, par le calcule fonctionnel, on a que $f\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(A_A \oplus \mathsf{X})$ est autoadjoint et anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ puisque

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, par le Remarque 3.45, il existe un unique $y \in \mathsf{X}$ tel que $f\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \\ L_y & 0 \end{pmatrix}$. Comme,

$$\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \\ L_y & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \circ L_y \circ L_y^* \\ L_y \circ L_y^* \circ L_y & 0 \end{pmatrix},$$

donc $L_x^* = L_y^* \circ L_y \circ L_y^*$. Découle de l'égalité

$$\begin{aligned} \langle\, x \,,\, z \,\rangle_A = L_x^*(z) &= L_y^*(L_y(L_y^*(z))) \\ &= \langle\, y \,,\, y \cdot \langle\, y \,,\, z \,\rangle_A \,\rangle_A \\ &= \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A \langle\, y \,,\, z \,\rangle_A \\ &= \langle\, y \cdot \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A \,,\, z \,\rangle_A, \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathsf{X}$, que $x = y \cdot \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A$. □

Dans la suite, on va montrer une technique qui servira pour démontrer que deux A-modules hilbertiens sont isomorphes.

Lemme 3.47 *Soient X, Y deux A-modules hilbertiens. S'il existe un morphisme $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $T(\mathsf{X})$ est dense dans Y et $T^*(\mathsf{Y})$ est dense dans X. Alors, X et Y sont isomorphes comme A-modules hilbertiens.*

Preuve. Dès que les morphismes T et T^* sont continus d'image dense, la composition $T^* \circ T$ est d'image dense, donc le morphisme $|T| = (T^* \circ T)^{1/2}$ est d'image dense. D'un autre côté, on a

$$\langle\, T(x) \,,\, T(y) \,\rangle_A = \langle\, x \,,\, T^* \circ T(y) \,\rangle_A = \langle\, x \,,\, |T|^2(y) \,\rangle_A = \langle\, |T|(x) \,,\, |T|(y) \,\rangle_A$$

pour tout $x, y \in \mathsf{X}$, donc on peut définir l'isométrie

$$\begin{array}{rccc} u: & T(\mathsf{X}) & \to & |T|(\mathsf{X}) \\ & T(x) & \mapsto & |T|(x) \end{array},$$

qui est A-linéaire dés que T et $|T|$ sont des morphismes A-linéaires. Comme T et $|T|$ sont des morphismes d'image dense, u peut être étendu à une isométrie U de Y sur X, qui est de plus A-linéaire. □

Théorème 3.48 *Soit* X *un* A*-module hilbertien. Alors, la correspondance*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathsf{X}) & \to & \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathsf{X})) \\ T & \mapsto & (T_1, T_2) \end{array}$$

avec $T_1(\theta_{x,y}) = \theta_{T(x),y}$ *et* $T_2(\theta_{x,y}) = \theta_{x,T^*(y)}$ *pour tout* $x, y \in \mathsf{X}$*, définie un isomorphisme entre* $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ *et* $\mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathsf{X}))$.

Preuve. Étant donné $T \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$, d'après le Lemme 3.34, pour chaque S dans le sous-espace vectoriel engendré par $\Theta(\mathsf{X})$, on a $T_1(S) = T \circ S$ et $T_2(S) = S \circ T$ dans $\mathcal{L}(\mathsf{X})$, donc $\|T_i(S)\| \leq \|T\|\|S\|$, pour $i = 1, 2$. Alors T_1 et T_2 peuvent être étendus a opérateurs bornés sur $\mathcal{K}(\mathsf{X})$. De plus, c'est un calcul facile de montrer que $(T_1, T_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathsf{X}))$. Si $T_1(\theta_{u,v}) = 0$, pour tout $u, v \in \mathsf{X}$. Alors,

$$T(x) = T(y \cdot \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A) = T(y) \cdot \langle\, y \,,\, y \,\rangle_A = \theta_{T(y),y}(y) = T_1(\theta_{y,y})(y) = 0,$$

pour tout $x \in \mathsf{X}$, donc $T = 0$. C'est-à-dire, la correspondance est injective.
Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathsf{X}))$. Étant donné $x \in \mathsf{X}$, si $\{x_n\}_n$ note la suite associé à x, tel que $\theta_{x,x}(x_n) \to x$ (voir le Corollaire 3.15), on définit

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_1(\theta_{x,x})(x_n),$$

et

$$T^*(x) := \lim_{n\to\infty} T_2(\theta_{x,x})^*(x_n).$$

- Étant donné $x, y \in \mathsf{X}$, on a

$$\begin{aligned} \langle\, x \,,\, T^*(y) \,\rangle_A &= \lim_{n\to\infty} \langle\, \theta_{x,x}(x_n) \,,\, T_2(\theta_{y,y})^*(y_n) \,\rangle_A \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle\, T_2(\theta_{y,y}) \circ \theta_{x,x}(x_n) \,,\, y_n \,\rangle_A \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle\, \theta_{y,y} \circ T_1(\theta_{x,x})(x_n) \,,\, y_n \,\rangle_A \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle\, T_1(\theta_{x,x})(x_n) \,,\, \theta_{y,y}(y_n) \,\rangle_A \\ &= \langle\, T(x) \,,\, y \,\rangle_A, \end{aligned}$$

  donc $T \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$.
- Étant donné $x, y \in \mathsf{X}$, on a

$$T_1(\theta_{\theta_{x,x}(x_n),y})(z) = T_1(\theta_{x,x} \circ \theta_{x_n,y})(z) = T_1(\theta_{x,x}) \circ \theta_{x_n,y}(z) = T_1(\theta_{x,x})(x_n) \cdot \langle\, y \,,\, z \,\rangle_A,$$

  pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathsf{X}$, donc $T_1(\theta_{x,y}) = \theta_{T(x),y}$. D'une manière similaire, $T_2(\theta_{x,y}) = \theta_{x,T^*(y)}$.

□

Corollaire 3.49

$$\mathcal{L}(\mathsf{H}_A) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathsf{H}_A)).$$

3.3 Produits tensoriels de modules hilbertiens

Soit A et B deux C*-algèbres. On considère X un A-module hilbertien, Y un B-module hilbertien, et $\phi\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{Y}_B)$ une application complètement positive. Alors, on peut considérer le produit tensoriel algébrique de X et Y sur $\mathbb{C}$, $\mathsf{X} \odot \mathsf{Y}$ qui est un B-module, par l'action à droite

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) \cdot b := \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \cdot b,$$

et on peut aussi définir sur $\mathsf{X} \odot \mathsf{Y}$, une B-produit scalaire de la suivante manière

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A) y'_j \,\rangle_B .$$

En effet, on a les conditions suivantes :

- $$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \left(\sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j\right)\cdot b \right\rangle_B &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \cdot b \right\rangle_B \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A)(y'_j \cdot b) \,\rangle_B \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A) y'_j \,\rangle_B\right)\cdot b \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B \cdot b\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B^* &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A) y'_j \,\rangle_B\right)^* \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A) y'_j \,\rangle_B^* \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \langle\, y'_j \,,\, \phi(\langle\, x_i \,,\, x'_j \,\rangle_A)^* y_i \,\rangle_B \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\rangle_B\end{aligned}$$
- Comme la matrice $\sum_{i,j=1}^{n} e_{i,j} \otimes \langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A \in M_n(A)$ est positive et $1 \otimes \phi\colon M_n(A) \to M_n(\mathcal{L}(\mathsf{H}_B))$ est une application positif, on a

$$\begin{aligned}\left\langle (y_k)_{k=1}^n, 1 \otimes \phi\left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{i,j} \otimes \langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A\right)(y_k)_{k=1}^n \right\rangle_B &= \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (y_k)_{k=1}^n, e_{i,j} \otimes \phi(\langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A)((y_k)_{k=1}^n)\big\rangle_B \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (y_k)_{k=1}^n, (0, \cdots, \phi(\langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A) y_j, \cdots, 0)\big\rangle_B \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle y_i, \phi(\langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A) y_j \big\rangle_B \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\rangle_B ,\end{aligned}$$

donc

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\rangle_B \geq 0.$$

L'ensemble

$$\mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} := \{z \in \mathsf{X} \odot \mathsf{Y} \,:\, \langle\, z \,,\, z \,\rangle_B = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{X}\odot\mathsf{Y}$, qui est invariant par l'action de B et on a la propriété $\langle\, x \,,\, y \,\rangle_B = 0$ pour tout $x \in \mathsf{X}\odot\mathsf{Y}$ et $y \in \mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}$. Donc $\mathsf{X}\odot\mathsf{Y}/\mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}$ est un B-module pré-hilbertien séparé avec le B-produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j + \mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} \right\rangle_B := \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B.$$

Le complété de $\mathsf{X} \odot \mathsf{Y}/\mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}$ par rapport à la norme induite par ce B-produit scalaire est un B-module hilbertien, il est appelé *le produit tensoriel intérieur de* X *et* Y, et il sera dénoté par $\mathsf{X} \otimes_\phi \mathsf{Y}$. De plus, il existe une action canonique de A sur $\mathsf{X} \odot \mathsf{Y}$ définie de la manière suivante

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) \cdot a := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a \otimes y_i;$$

d'après l'inégalité

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_{i,j} \otimes \langle\, x_i \cdot a \,,\, x_j \cdot a \,\rangle_A \leq \|a\|^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{i,j} \otimes \langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle_A \right)$$

dans $M_n(A)$ et le fait que ϕ est une application complètement positive, on a

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) \cdot a, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) \cdot a \right\rangle_B \leq \|a\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\rangle_B. \tag{7}$$

Découle de l'inégalité (7) que le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}$ est invariant par A, donc on peut bien étendre l'action canonique de A sur $\mathsf{X} \otimes_\phi \mathsf{Y}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} \right) \cdot a := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a \otimes y_i + \mathcal{N}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}.$$

Exemple 3.50 *Soient* X *un* A*-module hilbertien,* $\mathcal{H}$ *un espace hilbertien. Si on considère l'application complètement positive* $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathsf{X})$, $\lambda \mapsto (\phi(\lambda)x := \lambda x)$. *Alors, on construit le* A*-module hilbertien* $\mathcal{H} \otimes_\phi \mathsf{X}$ *qui sera dénoté par* $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathsf{X}$. *L'action de* A *est donnée par*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i \otimes a_i \right) \cdot a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i \otimes a_i a,$$

et le produit scalaire est donné par

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i \otimes a_i, \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j h'_j \otimes a'_j \right\rangle_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\lambda'}_j (\, h_i \mid h'_j \,) \langle\, a_i \,,\, a'_j \,\rangle_A.$$

Soient les modules hilbertiens X_A, X'_A, Y_B, Y'_B, les applications complètement positifs $\phi\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{Y}_B)$, $\phi'\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{Y}'_B)$, et les morphismes $T \in \mathcal{L}(\mathsf{X}_A, \mathsf{X}'_A)$, $S \in \mathcal{L}(\mathsf{Y}_B, \mathsf{Y'}_B)$ tel que $\phi'(a) \circ S^* = S^* \circ \phi(a)$ pour tout $a \in A$. Si on définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} T \otimes S: & \mathsf{X} \otimes_\phi \mathsf{Y} & \to & \mathsf{X}' \otimes_{\phi'} \mathsf{Y}' \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T(x_i) \otimes S(y_i) \end{array}$$

Dès qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\left\langle T \otimes S \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right), \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \otimes S(y_i), \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle\, S(y_i) \,,\, \phi(\langle\, T(x_i) \,,\, x'_j \,\rangle_A) y'_j \,\rangle_B \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle\, y_i \,,\, \phi'(\langle\, x_i \,,\, T^*(x'_j) \,\rangle_A) S^*(y'_j) \,\rangle_B \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} T^*(x'_j) \otimes S^*(y'_j) \right\rangle_B \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, T^* \otimes S^* \left(\sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j \right) \right\rangle_B ,
\end{aligned}$$

donc $T \otimes S \in \mathcal{L}(\mathsf{X} \otimes_\phi \mathsf{Y}, \mathsf{X}' \otimes_{\phi'} \mathsf{Y}')$.

4 Le théorème de Stinespring

Définition 4.1 *Un ensemble d'éléments $\{x_i\}_{i \in I}$ dans un A-module hilbertien X est appelé* un système de générateurs pour X, *si les sommes finies $\{\sum_k x_{i_k} \cdot a_k \,:\, a_k \in A\}$ est dense dans X. Un module hilbertien qui a un système dénombrable de générateurs est appelé* dénombrablement engendré.

On va montrer une autre caractérisation du module standard H_A, en utilisant le produit tensoriel intérieur, qui sera utilisé pour démontrer le théorème de stabilisation de Kasparov.

Lemme 4.2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Alors, le produit tensoriel intérieur $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$ et H_A sont isomorphes comme A-modules hilbertiens.*

Preuve. Soit $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}_0 := span\{e_i\}$, donc $\mathcal{H}_0 \odot_{\mathbb{C}} A$ est dense dans $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$. On définit

$$\begin{array}{rccc}
\alpha : & \mathcal{H}_0 \times A & \to & \mathsf{H}_A \\
& \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, a \right) & \mapsto & (\lambda_1 a, \lambda_2 a, \cdots, \lambda_n a, 0, \cdots)
\end{array}$$

C'est évident que α est une transformation bilinéaire, donc il existe une transformation linéaire ψ de $\mathcal{H}_0 \odot_{\mathbb{C}} A$ vers H_A tel que $\psi(e_i \otimes a) = \alpha(e_i, a)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A$. De plus,

$$\langle\, \psi(e_i \otimes a) \,,\, \psi(e_j \otimes a') \,\rangle_A = \langle\, \alpha(e_i, a) \,,\, \alpha(e_j, a') \,\rangle_A = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \langle\, a \,,\, a' \,\rangle_A & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$$\langle\, e_i \otimes a \,,\, e_j \otimes a' \,\rangle_A = (\, e_i \mid e_j \,) \langle\, a \,,\, a' \,\rangle_A = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \langle\, a \,,\, a' \,\rangle_A & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Donc, on a les égalités

- $$\psi\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes a_i\right)\cdot a\right)=\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes a_i a\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(\lambda_i e_i,a_i a)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha(\lambda_i e_i,a_i)\cdot a=\left(\sum_{i=1}^{n}\psi(\lambda_i e_i\otimes a_i)\right)\cdot a$$
$$=\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes a_i\right)\cdot a.$$

- $$\left\langle\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes a_i\right),\psi\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda'_j e_j\otimes a'_j\right)\right\rangle_A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\overline{\lambda'}_j\left\langle\psi\left(e_i\otimes a_i\right),\psi\left(e_j\otimes a'_j\right)\right\rangle_A$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\overline{\lambda'}_j\left\langle e_i\otimes a_i,e_j\otimes a'_j\right\rangle_A$$
$$=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes a_i,\sum_{j=1}^{m}\lambda'_j e_j\otimes a'_j\right\rangle_A$$

C'est-à-dire, ϕ est un morphisme de A-modules hilbertiens qui préserve le produit scalaire. Soit $(a_n)\in \mathsf{H}_A$, on a

$$\begin{aligned}\|(a_n)-(a_1,\cdots,a_k,0,\cdots)\|_A^2 &= \|(0,\cdots,0,a_{k+1},a_{k+2},\cdots)\|_A^2\\ &= \|\langle\ (0,\cdots,0,a_{k+1},a_{k+2},\cdots)\ ,\ (0,\cdots,0,a_{k+1},a_{k+2},\cdots)\ \rangle_A\|\\ &= \left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i^*a_i\right\|,\end{aligned}$$

pour chaque et chaque $k\in\mathbb{N}$. Dès que $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*a_i$ converge dans A, donc la suite $\{(a_1,\cdots,a_k,0,\cdots)\}_k$ converge vers (a_n) dans H_A. Comme

$$(a_1,\cdots,a_k,0,\cdots)=\psi(\sum_{i=1}^{k}e_i\otimes a_i),$$

donc (a_n) appartient à la clôture de l'image de ψ. Alors, ψ est d'image dense, donc on peut l'étendre à un isomorphisme de A-modules hilbertiens entre $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{C}}A$ et H_A. □

Remarque 4.3 *Soit A une C^*-algèbre qui n'est pas unitaire. On identifie H_A avec $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{C}}A$ et H_{A_1} avec $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{C}}A_1$. Si i note l'inclusion de A dans A_1, donc $1_{\mathcal{H}}\otimes i\colon \mathsf{H}_A\to\mathsf{H}_{A_1}$ est un morphisme isométrique de modules hilbertiens et son image est $\overline{\mathsf{H}_{A_1}\cdot A}$, puisque $h\otimes a=(h\otimes 1_{A_1})\cdot a$ dans H_{A_1}. Alors H_A est isomorphe à $\overline{\mathsf{H}_{A_1}\cdot A}$ comme modules hilbertiens.*

De plus, si X est un A-module hilbertien, on peut voir X comme un A_1-module hilbertien et obtenir un morphisme isométrique $1_X\oplus(1_{\mathcal{H}}\otimes i)\colon \mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_A\to\mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_{A_1}$ avec image $\overline{(\mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_{A_1})\cdot A}$ puisque $\overline{\mathsf{X}\cdot A}=\mathsf{X}$. Alors $\mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_A$ est isomorphe à $\overline{(\mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_{A_1})\cdot A}$ comme modules hilbertiens.

Théorème 4.4 (Stabilisation de Kasparov) *Soit X un A-module hilbertien dénombrablement engendré, alors*

$$\mathsf{X}\oplus\mathsf{H}_A\simeq\mathsf{H}_A,$$

comme A-modules hilbertiens.

Preuve. D'abord, si $u\colon \mathsf{H}_{A_1} \to \mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_{A_1}$ est un isomorphisme de A-modules hilbertiens, on peut obtenir un isomorphisme de $\overline{\mathsf{H}_{A_1} \cdot A}$ sur $\overline{(\mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_{A_1}) \cdot A}$. D'après la Remarque 4.3, on obtient un isomorphisme entre $\mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_A$ et H_A. Alors, on peut supposer toujours que A est unitaire.

Comme X est dénombrablement engendré, donc on peut choisir un système dénombrable de générateurs $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe une infinité de x_n tel que $x_n = x_m$. D'après le Lemme précédent, on voit $\mathsf{H}_A = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$, où $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Si $\{h_n\}_{n\in N}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, donc c'évident que $\{e_n := h_n \otimes 1_A\}_{n\in N}$ est un système dénombrablement engendré pour H_A et que $\langle\, e_n \,,\, e_m \,\rangle_A = \delta_{n,m} 1_A$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$y_n := (2^{-n} x_n, 4^{-n} e_n) \in \mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_A,$$

donc

$$T := \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{y_i, e_i}$$

appartient à $\mathcal{K}(\mathsf{H}_A, \mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_A)$. On a

$$\begin{aligned} T(e_n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{y_i,e_i}(e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot \langle\, e_i \,,\, e_n \,\rangle_A \\ &= 2^{-n}(x_n, 0) + 4^{-n}(0, e_n) \end{aligned}$$

et si $x_m = x_n$, donc

$$T(2^m e_m) = (x_n, 0) + 2^{-m}(0, e_m).$$

Puisqu'on a supposé qu'il y a une infinité de m tel que $x_m = x_n$, on a que $(x_n, 0)$ appartient à l'adhérence de $T(\mathsf{H}_A)$ et comme

$$(0, e_n) = T(4^n e_n) - 2^n (x_n, 0),$$

donc $(0, e_n)$ appartient aussi à l'adhérence de $T(\mathsf{H}_A)$. Alors $\overline{T(\mathsf{H}_A)} = \mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_A$. De plus,

$$T^* = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{e_i, y_i},$$

donc on a $T(4^n e_n) = (0, e_n)$, d'où $\overline{T^*(\mathsf{X} \oplus \mathsf{H}_A)} = \mathsf{H}_A$. D'après le Lemme 3.47, on a fini la preuve. □

Théorème 4.5 (Stinespring) *On suppose que la C*-algèbre A est séparable, la C*-algèbre B a des unités approchées dénombrables. Soit $\phi\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$ une application complètement positive, alors*

1) *Il existe un *-homomorphisme $\pi\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$ et un élément $V \in \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$ avec la propriété,*

$$\phi(a) = V^* \circ \pi(a) \circ V,$$

pour tout $a \in A$. Si A est unitaire, alors π peut être choisi unifère.

2) *Si A est unitaire et ϕ est unifère, il existe un homomorphisme unifère*

$$\sigma\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{H}_B \oplus \mathsf{H}_B)$$

tel que pour tout $a \in A$, $\phi(a) \oplus 0 = q \circ \sigma(a) \circ q$, où $q \in \mathcal{L}(\mathsf{H}_B \oplus \mathsf{H}_B)$ est la projection sur le premier facteur directe. Si la C-algèbre A est non unitaire, alors ce reste valide si $\|\phi\| \leq 1$.*

Preuve. D'abord, on considère que A est unitaire. On prend le B-module hilbertien $E := A \otimes_\phi \mathsf{H}_B$ et on définit le *-homomorphisme unifère $\pi'\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{E})$ comme l'action canonique de A sur E. On définit les fonctions

$$\begin{array}{rccc} W\colon & \mathsf{H}_B & \to & \mathsf{E} \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 1 \otimes \mathbf{x} + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B} \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} W^*: & A \odot \mathsf{H}_B & \to & \mathsf{H}_B \\ & \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n \phi(a_i)\mathbf{x}_i \end{array},$$

Comme l'application $\phi' = 1 \otimes \phi\colon M_n(A) \to M_n(\mathcal{L}(\mathsf{H}_B))$ est positif, donc $\phi'(a^*)\phi'(a) \leq \|\phi'(1)\|\phi'(a^*a)$ et on a l'inégalité

$$\left\| W^*\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i\right)\right\|_B^2 \leq \left\| \sum_{i,j=1}^n \langle\, \mathbf{x}_i \,,\, \phi(a_i^*)\phi(a_j)\mathbf{x}_j \,\rangle_B \right\| \leq \|\phi(1)\| \left\| \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i \right\rangle_B \right\|.$$

Donc $W^*(\mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B}) = 0$, et W^* peut être étendu à un morphisme sur E par continuité. D'après les égalités

- $$\begin{aligned} \left\langle W(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B} \right\rangle_B &= \left\langle 1 \otimes \mathbf{x} + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B}, \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B} \right\rangle_B \\ &= \left\langle \mathbf{x}, \sum_{i=1}^n \phi(a_i)\mathbf{y}_i \right\rangle_B \\ &= \left\langle \mathbf{x}, W^*\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B}\right)\right\rangle_B, \end{aligned}$$
- $$W^* \circ \pi'(a) \circ W(\mathbf{x}) = W^*(a \otimes \mathbf{x} + \mathcal{N}_{A,\mathsf{H}_B}) = \phi(a)\mathbf{x},$$

on a $W \in \mathcal{L}(\mathsf{H}_B, \mathsf{E})$ et $W^* \circ \pi'(a) \circ W = \phi(a)$.

Soit $\pi_0\colon A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une *-homomorphisme quelconque (e.g. une représentation de A), en utilisant l'identification $\mathsf{H}_B = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} B$, on peut construire le *-homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \pi'': & A & \to & \mathcal{L}(\mathsf{H}_B) \\ & a & \mapsto & \pi_0(a) \otimes id_B \end{array},$$

On prend le *-homomorphisme $\pi = \pi' \oplus \pi''\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{E} \oplus \mathsf{H}_B)$ et les morphismes canoniques $i\colon \mathsf{E} \to \mathsf{E} \oplus \mathsf{H}_B$, $j\colon \mathsf{E} \oplus \mathsf{H}_B \to \mathsf{E}$, si on pose $V := i \circ W$ et $V^* := W^* \circ j$, en utilisant l'identification $\mathsf{E} \oplus \mathsf{H}_B \simeq \mathsf{H}_B$, on a $V \in \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$ et

$$V^* \circ \pi(a) \circ V = W^* \circ j \circ \pi(a) \circ i \circ W = W^* \circ \pi'(a) \circ W = \phi(a),$$

pour tout $a \in A$.

Si $\phi(1) = 1$, donc $W^* \circ W = 1$ et $W \circ W^*$ est une projection. Donc,

$$\mathsf{E} \simeq Im(W \circ W^*) \oplus Im(1 - W \circ W^*) \simeq \mathsf{H}_B \oplus \mathsf{E}',$$

et

$$\mathsf{E} \oplus \mathsf{H}_B \simeq \mathsf{H}_B \oplus (\mathsf{E}' \oplus \mathsf{H}_B) \simeq \mathsf{H}_B \oplus \mathsf{H}_B.$$

D'après cet identification V devient l'inclusion $\mathsf{H}_B \oplus 0 \subset \mathsf{H}_B \oplus \mathsf{H}_B$ et V^* devient la projection de $\mathsf{H}_B \oplus \mathsf{H}_B$ sur le première facteur directe.

Dans le cas non-unitaire, si $\phi\colon A \to \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$ est une application complètement positive tel que $\|\phi\| \leq 1$, donc on peut étendre ϕ à une application complètement positive $\tilde{\phi}\colon A_1 \to \mathcal{L}(\mathsf{H}_B)$, et on revient au le cas unitaire. □

5 La théorie Ext de Kasparov

Dans la suite, on appellera simplement algèbres aux C*-algèbres.

5.1 Extensions d'algèbres et l'invariant de Busby

Définition 5.1 *Soient A et C deux algèbres. Par une* extension $E = (\alpha, B, \beta)$ *de C par A, on veut dire une algèbre B avec morphismes α et β tel que la suite courte ci-dessous*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

est exacte. L'ensemble de tous les extensions de C par A sera dénoté $Ext(C, A)$. L'extension E est appelé trivial, *si la suite exacte courte est scindée, i.e. il existe un morphisme $\gamma: C \to B$ tel que $\beta \circ \gamma = id_C$; E est appelé* essentielle *si $\alpha(A)$ est un idéal essentiel dans B.*

Lemme 5.2 *Soit* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte. Alors, il existe un unique morphisme $\sigma: B \to \mathcal{M}(A)$ tel qu'on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i_A"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathcal{M}(A) \end{tikzcd}$$

Preuve. Comme $\alpha(A)$ est un idéal dans B, par le Théorème 2.15, on peut obtenir un unique morphisme $\mu: B \to \mathcal{M}(\alpha(A))$ tel que $\mu|_{\alpha(A)} = i_{\alpha(A)}$. Si α' est l'extension de α à un isomorphisme entre $\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}(\alpha(A))$, en prenant $\sigma = \alpha'^{-1} \circ \mu$, on a $\sigma \circ \alpha = i_A$.

Si $\phi: B \to \mathcal{M}(A)$ est autre morphisme tel que $\phi \circ \alpha = i_A$, le morphisme $\alpha' \circ \phi$ est l'identité dans $\alpha(A)$ et par le théorème 2.15, il est égal à μ dans tout B. Donc $\phi = \alpha'^{-1} \circ \mu = \sigma$. □

Dans la suite, soit $E = (\alpha, B, \beta)$ une extension de C par A.

Définition 5.3 *On définit* l'invariant de Busby de E *comme le morphisme*

$$\begin{array}{rccc} \tau_E & : & C & \to & \mathcal{M}(A)/A \\ & & c & \mapsto & \pi_A \circ \sigma(b), \end{array}$$

où $b \in B$ tel que $\beta(b) = c$, et $\pi_A: \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/A$ est le morphisme canonique.

Remarque 5.4 *Le morphisme τ_E est bien défini. En effet, si on a $b_1, b_2 \in B$ tel que $\beta(b_1) = \beta(b_2) = c$, donc il existe $a \in A$ tel que $b_1 - b_2 = \alpha(a)$. Alors $\pi_A \circ \sigma(b_1 - b_2) = \pi_A \circ \sigma \circ \alpha(a) = \pi_A \circ i_A(a) = 0$.*

Proposition 5.5 *L'invariant de Busby de E est l'unique morphisme qui fait le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau_E"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & \mathcal{M}(A) \arrow[r, "\pi_A"'] & \mathcal{M}(A)/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Preuve. Il découle de la définition précédente. □

De manière réciproque, on va partir d'un morphisme de C vers $\mathcal{M}(A)/A$, et on va trouver une extension de C par A. On utilisera la définition suivante :

Définition 5.6 *Un pullback de l'algèbre C par les morphismes $\alpha_1: A_1 \to C$ et $\alpha_2: A_2 \to C$, est la sous-algèbre de $A_1 \oplus A_2$ définie par*

$$PB(C, \alpha_1, \alpha_2) := \{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 \, : \, \alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2)\}.$$

Pour $i = 1, 2$, on a les morphismes

$$\begin{array}{rccc} \beta_i & : & PB(C, \alpha_1, \alpha_2) & \to & A_i \\ & & (a_1, a_2) & \mapsto & a_i \end{array}$$

Proposition 5.7 *Si D est une algèbre avec morphismes $\delta_i\colon D \to A_i$ pour $i = 1, 2$ qui satisfont $\alpha_1 \circ \delta_1 = \alpha_2 \circ \delta_2$, alors il existe un unique morphisme $\Delta_D\colon D \to PB := PB(C, \alpha_1, \alpha_2)$ qui fait le diagramme*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\delta_2"] \arrow[dd, "\delta_1"'] \arrow[dr, "\Delta_D"] & & A_2 \arrow[dd, "\alpha_2"] \\ & PB \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dl, "\beta_1"] & \\ A_1 \arrow[rr, "\alpha_1"'] & & C \end{tikzcd}$$

commutatif.

Proposition 5.8 *Soit τ un morphisme de l'algèbre C vers l'algèbre $\mathcal{M}(A)/A$, et soit PB le pullback de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et τ,*

$$\begin{tikzcd} PB \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "\tau"] \\ \mathcal{M}(A) \arrow[r, "\pi_A"'] & \mathcal{M}(A)/A \end{tikzcd} .$$

Alors, avec les morphismes canoniques

$$\begin{array}{cccc} \alpha' : & A & \to & PB \\ & a & \mapsto & (i_A(a), 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \beta' : & PB & \to & C \\ & (m, c) & \mapsto & c \end{array},$$

on peut construire la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} PB \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$$

qui a comme l'invariant de Busby à τ.

Preuve. El pullback est $PB = \{(m, c) \in \mathcal{M}(A) \oplus C \,:\, \pi_A(m) = \tau(c)\}$, donc α et β sont bien définis et $Ker\beta = \{(m, c) \in PB \,:\, c = 0\} = A \oplus 0 = \alpha(A)$. De plus α est injectif, et β est surjectif (car π_A est surjectif).

Si $\theta\colon Pb \to \mathcal{M}(A)$ est le morphisme $(m, c) \mapsto m$, on a $\theta \circ \alpha = i_A$. Comme $\tau_E(\beta(m, c)) = \pi_A \circ \theta(m, c) = \pi_A(m) = \tau(c) = \tau(\beta(m, c))$, alors $\tau_E = \tau$. $\square$

Remarque 5.9 *On vient de construit une application*

$$\begin{array}{ccc} Ext(C, A) & \to & Hom(C, \mathcal{M}(A)/A) \\ E & \mapsto & \tau_E \end{array}$$

qui est surjective. Dans la suite, on va déterminer une relation dans l'ensemble des extensions de C par A qui fait l'application précédente soit injective.

Proposition 5.10 *Il existe un isomorphisme ψ entre B et le pullback PB de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et τ_E qui fait le suivant diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"'] & PB \arrow[r, "\beta'"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutatif.

Preuve. Par définition de τ_E, $\pi_A \circ \sigma(b) = \tau_E \circ \beta(b)$ pour tout $b \in B$ donc on pose

$$\begin{array}{rccc} \psi : & B & \to & PB \\ & b & \mapsto & (\sigma(b), \beta(b)) \end{array}$$

Comme $\psi \circ \alpha(a) = (\sigma \circ \alpha(a), 0) = (i_A(a), 0) = \alpha'(a)$ et $\beta' \circ \psi(b) = \beta'(\sigma(b), \beta(b)) = \beta(b)$, donc ψ fait le diagramme commutatif.

Si $0 = \psi(b)$, $b \in Ker\beta$ donc il existe $a \in A$ tel que $b = \alpha(a)$. Comme $\sigma \circ \alpha = i_A$, on a $0 = \sigma(b) = \sigma \circ \alpha(a) = a$, donc $b = \alpha(a) = 0$.

Soit $(m, c) \in PB$. Comme β est surjectif, il existe $b_0 \in B$ tel que $\beta(b_0) = c$; si on pose $x := \sigma(b_0) - m \in \mathcal{M}(A)$, donc $\pi_A(\sigma(b_0) - m) = \tau_E \circ \beta(b_0) - \pi_A(m) = \tau_E(c) - \pi_A(m) = 0$, c'est-à-dire $x \in A$. Alors, si $b = b_0 - \alpha(x)$, on a $\sigma(b) = \sigma(b_0) - x = m$ et $\psi(b) = (\sigma(b), \beta(b)) = (m.c)$. □

Corollaire 5.11 *Soient $E_1 = (\alpha_1, B_1, \beta_1)$, $E_2 = (\alpha_2, B_2, \beta_2)$ deux extensions de C par A dont les invariants de Busby sont τ_{E_1}, τ_{E_2} respectivement. Alors $\tau_1 = \tau_2$ si et seulement s'il existe un isomorphisme ψ qui fait le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, equal] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_2"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commutatif.

Preuve. On suppose $\tau_1 = \tau_2$. Si PB est le pullback de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et $\tau_1 = \tau_2$ et $\psi_i \colon B_i \to PB$ $(i = 1, 2)$ les isomorphismes qu'on trouve par la Proposition 5.10. Alors, le isomorphisme $\psi := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ est le morphisme qu'on cherche.

Réciproquement, soient σ_1, σ_2 les uniques morphismes tels que $\sigma_1 \circ \alpha_1 = \sigma_2 \circ \alpha_2 = i_A$, comme on a $\sigma_1 \circ \psi^{-1} \circ \alpha_2 = \sigma_1 \circ \alpha_1 = i_A$ donc $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \psi$. Donné $c \in C$, soit $b_1 \in B_1$ tel que $\beta_1(b_1) = c$, dès que $\beta_2(\psi(b_1)) = \beta_1(b_1) = c$ donc $\tau_1(c) = \pi_A \circ \sigma_1(b_1) = \pi_A \circ \sigma_2(\psi(b_1)) = \tau_2(c)$. □

Définition 5.12 *Deux extensions qui satisfont le Corollaire 5.11 sont appelés* fortement isomorphes. *On note $E_1 \equiv E_2$, si E_1 et E_2 sont fortement isomorphes, et $Ext_{\equiv}(C, A)$ à l'ensemble de classes d'équivalence pour la relation fortement isomorphes dans les extensions de C par A.*

Proposition 5.13

1. *E est essentiel si et seulement si le morphisme τ_E est injectif.*
2. *E est trivial si et seulement s'il existe un morphisme $\eta \colon C \to \mathcal{M}(A)$ tel que $\tau_E = \pi \circ \eta$,*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\omega"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau_E"] \arrow[dl, "\eta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & \mathcal{M}(A) \arrow[r, "\pi_A"'] & \mathcal{M}(A)/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

3. *$\tau_E = 0$ si et seulement si B est isomorphe à $A \oplus C$.*

Preuve. Voir [11] □

5.2 Sommes des extensions

Soient A et C deux algèbres.

Définition 5.14 *Soient $E_1 = (\alpha_1, B_1, \beta_1), E_1 = (\alpha_1, B_1, \beta_1) \in Ext(C, A)$ dont les invariants de Busby sont τ_{E_1}, τ_{E_2} respectivement. On dit que E_1 et E_2 sont* fortement équivalents*, et il sera noté par $\tau_{E_1} \approx \tau_{E_2}$, s'il existe un élément unitaire $u \in \mathcal{M}(A)$ tel que $\tau_2(c) = \pi_A(u)\tau_1(c)\pi_A(u)^*$ pour tout $c \in C$. On va noter par $Ext_{\approx}(C, A)$, l'ensemble de classes d'équivalence par la relation fortement équivalent dans les extensions de C par A.*

Remarque 5.15 *Évidement, la condition d'être fortement équivalent implique celle d'être fortement isomorphe.*

Définition 5.16 *Soit $\phi \colon \mathcal{K} \otimes M_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{K}$ un isomorphisme quelconque. Le morphisme*

$$S_\phi \colon A \otimes (\mathcal{K} \otimes M_2(\mathbb{C})) \to A \otimes \mathcal{K}$$

défini par $S_\phi := 1 \otimes \phi$ est appelé un isomorphisme standard pour ϕ *de $M_2(A \otimes \mathcal{K})$ vers $A \otimes \mathcal{K}$. On va aussi noter par S_ϕ aux isomorphismes $M_2(\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})) \to \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ et $M_2(\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}) \to \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$ qui sont induits par S_ϕ et la Proposition 2.21.*

Proposition 5.17 *Soit S_ϕ, S_ψ deux morphismes standards de $M_2(A \otimes \mathcal{K})$ vers $A \otimes \mathcal{K}$. Il existe un élément $u \in \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ tel que l'automorphisme $S_\phi \circ S_\psi^{-1} \colon A \otimes \mathcal{K} \to A \otimes \mathcal{K}$ est $ad(u)$.*

Preuve. Par définition, $S_\phi \circ S_\psi^{-1} = 1 \otimes \phi \circ \psi^{-1}$. Dés que $\phi \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{K}$, par la Proposition 2.13, il existe un élément unitaire $U \in \mathcal{B}$ tel que $\phi \circ \psi^{-1} = adU$. Si on pose $u := 1 \otimes U \in \mathcal{M}(A) \otimes B \subset \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$, on a $S_\phi \circ S_\psi^{-1} = ad(u)$. □

Corollaire 5.18 *Soient x_1 et x_2 dans $Ext_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$. Si E_1 et E_2 sont les extensions représentants de x_1 et x_2 respectivement, dont*

$$\tau_i \colon C \to \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$$

sont ses invariants de Busby, alors l'application

$$C \xrightarrow{\tau_1 \oplus \tau_2} \mathcal{M}(A^s)/A^s \hookrightarrow M_2(\mathcal{M}(A^s)/A^s) \xrightarrow{S_\phi} \mathcal{M}(A^s)/A^s$$

définit une extension de C par $A \otimes \mathcal{K}$ et son $\approx$-classe d'équivalence est indépendante du choix des représentants E_1 et E_2 et de l'isomorphisme $S_\phi \colon M_2(A \otimes \mathcal{K}) \to A \otimes \mathcal{K}$. La $\approx$-classe d'équivalence qui contient cette extension est appelée la somme de x_1 et x_2, *et elle sera note par $x_1 \oplus x_2$.*

Proposition 5.19 *L'ensemble $Ext_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ est fermé par la somme définie dans le corollaire précédent. La somme des extensions définie est associatif et commutatif.*

Proposition 5.20 *L'ensemble des extensions triviaux de $Ext_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ est fermé par la somme des extensions. Le quotient de $Ext_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ par l'ensemble des extensions triviaux est un demi-groupe commutatif noté par $\boldsymbol{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$.*

Remarque 5.21 *Si τ_1 et τ_2 sont deux extensions de C par $A \otimes \mathcal{K}$, alors τ_1 et τ_2 sont égaux dans $\boldsymbol{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existent des extensions triviaux τ_1' et τ_2' tel que $\tau_1 \oplus \tau_1'$ est $\tau_2 \oplus \tau_2'$ sont fortement équivalent.*

5.3 Extensions inversibles

Théorème 5.22 *Si C est separable et A a des unités approchées dénombrables. Alors une extension $\tau \colon C \to \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$ est un élément inversible de $\boldsymbol{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existe une application complètement positive $\nu \colon C \to \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ tel que $\pi_A \circ \nu = \tau$.*

Preuve. On utilise le Théorème de Stinespring. □

Définition 5.23 *Une extension*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

est dite demi-scindée *s'il existe une application complètement positive $\gamma \colon C \to B$ tel que $\beta \circ \gamma = id_C$.*

Corollaire 5.24 *Si C est separable et A a des unités approchées dénombrables. Une extension τ de C par $A \otimes \mathcal{K}$ est un élément inversible de $\boldsymbol{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existe une extension trivial τ' tel que $\tau \oplus \tau'$ est semi-scindée.*

Références

[1] Arverson, W. *An Invitation to C*-Algebras.* Springer-Verlag, 1976.

[2] Baaj, S., and Skandalis, G. Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (1993), 425–488.

[3] Kaplansky, I. Modules Over Operator Algebras. *American Journal of Mathematics 75*, 4 (Oct. 1953), 839–858.

[4] Kasparov, G. G. Hilbert C*-modules : Theorems of Stinespring and Voiculescu. *Journal of Operator Theory* (1980), 133–150.

[5] Murphy, G. J. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, INC., 1990.

[6] Paschke, W. L. Inner Product Modules Over B*-Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society 182* (Aug. 1973), 443–468.

[7] Raeburn, I., and Williams, D. P. *Morita Equivalence and Continuous-Trace C*-Algebras*, vol. 60 of *Mathematical surveys and monographs.* American Mathematical Society, 1998.

[8] Rieffel, M. A. Induced Representations of C*-Algebras. *Advances in Mathematics* (1974), 176–257.

[9] Rieffel, M. A. Morita Equivalence for Operator Algebras. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (1982), 176–257.

[10] Takesaki, M. *Theory of Operators algebras I*, vol. 124 of *Encyclopaedia Subseries on Operator Algebras and Non-Commutative Geometry.* Springer, 2001.

[11] Wegge-Olsen, N. E. *K - Theory and C* - Algebras : A Friendly Approach.* Oxford University Press, 1993.